# ЛЕКЦИЯ 11+.
# Гармонические колебания.

А.И. Валишев, В.Г. Сербо.

## 20. Одномерное движение.

### 20.1.1. Интегралы движения.

***Df.*** **Функция координат и скоростей которая остается постоянной при движении механической системы называется *интегралом движения.***

***Пример.*** **Полная энергия системы в поле консервативных сил сохраняется. Следовательно полная энергия – интеграл движения.**

$$E = K + U = const\,.$$

**В классической механике доказано: траектория системы в фазовом пространстве** $2f$ **измерений (фазовым называется объединенное пространство координат** $q_i$ $(i = 1,\dots, f\,)$ **и импульсов** $p_i$ $(\,i = 1,\dots, f\,)$**) определяется энергией системы** $E$ **и** $(f\,\text{-}1)$ **числом констант** $c_1\,,\,c_2\,,\,\dots,\,c_{f\text{-}1}\,.$

$c_i$ **- интегралы движения.**

***Упражнение.*** **Определить интегралы движения для замкнутой системы в поле консервативных сил.**

## 20.1.2. Одномерное движение.

**Ставится задача определения движения частицы массы** $m$ **в потенциальном поле** $U(x)$**. Требуется интегрировать уравнение движения** $(m = const)$**:**

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{dU}{dx}\ .$$

**При заданных начальных данных** $x_0 = x(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ **существует единственное решение** $x(t)$ .

**Полная энергия по определению – интеграл движения:**

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = const\ . \qquad (*)$$

**Энергия при заданных начальных данных:**

$$E_0 = \frac{m{v_0}^2}{2} + U(x_0) = E = const.$$

## 20.1.3. Определение зависимости координаты от времени *x(t)*.

**Решается дифференциальное уравнение 2-го порядка (*).**

**Первый интеграл:**

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E\,, \qquad \to\ \dot{x}^2 = \frac{2}{m}\big(E - u(x)\big);$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}\,.$$

**Переменные разделяются !:**

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}\,.$$

**Вторым интегрированием определяется траектория в виде зависимости *t(x)*:**

$$t = t(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0\,.$$

## 20.1.4. Анализ движений.

**С необходимостью кинетическая энергия** $K \geq 0$. **Поскольку** $K = E - U(x)$, **движение происходит в областях, где**

$$E \geq U(x).$$

**Точки** $E = U(x_i)$ **называются точками поворота .**
**Движение называется финитным если происходит в ограниченной области пространства** $x_1 \leq x \leq x_2$ ;
**В противном случае инфинитное – в неограниченной области**

$$x_3 \leq x \leq \infty.$$

**Вблизи точек поворота частица замедляется поскольку** $F = -U'$ , **после отражения частица ускоряется.**

**В области** $x_1 \leq x \leq x_2$ **движение периодическое – происходят колебания. Период движения = колебаний – двойное время движения между точками поворота:**

$$T = \pm\sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}.$$

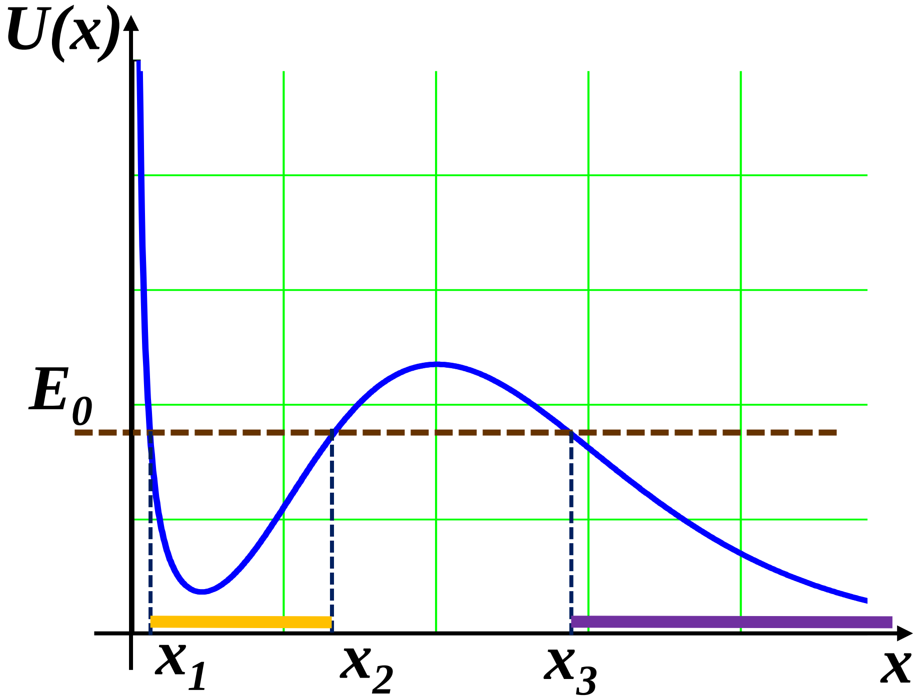



**Рис. Классификация движений.**

**Финитное** — $x_1 \leq x \leq x_2$;

**инфинитное** — $x_3 \leq x \leq \infty$

***Df.*** **Частота циклическая = число периодов в единицу времени (за 1 секунду). Единица измерения циклической частоты** – *1 Герц (Гц)*

$$\nu = \frac{1}{T} .$$

**Характерные частоты:**

**частоты сигнала мобильной связи** *0,8 ÷ 2,6 ГГц (гига Герц)*= $2,6 \cdot 10^{9}$ *Гц* .

**Частоты человеческого голоса** ~ *60 Гц ÷ 1,5 КГц = $1,5 \cdot 10^{3}$ Гц* .

## 21. Линейный осциллятор.

**Лат. oscillo – качаюсь. Осциллятор – физическая система, совершающая колебательное, периодическое движение. Линейный осциллятор в случае, если сила пропорциональна малому смещению, тогда потенциальная энергия при малом смещении относительно положения равновесия пропорциональна квадрату смещения. Колебания чрезвычайно широкий класс явлений природы.**

### 21.1. Малые колебания.

### 21.1.1. Разложение потенциальной энергии *U(x)* вблизи минимума.

**Удобно начало отсчета координаты сместить в точку**

$$U = min\ U \leftrightarrow x = 0\ .$$

**Разложение** *U(x)* **в ряд Тейлора вблизи т.** *x = 0*

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \cdots \left(\frac{1}{n!}\right) U^{(n)} x^n + \cdots\ .$$

### 21.1.1. Анализ ряда.

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \cdots \left(\frac{1}{n!}\right) U^{(n)} x^n \ .$$

**А) Значение** $U(0)$ **несущественно, поскольку начало отсчета потенциальной энергии выбирается произвольно.**

**В) Поскольку** $U = min$ **в т.** $x = 0$, **следовательно** $\Rightarrow$ $U'(0) = 0$ **.**

**С)** $U''(0) = k > 0$ **,сила = градиент потенциала** $\Rightarrow F_x = -kx$ .

**Сила** $F_x = -dU/dx$ **является возвращающей,**

**Сила направлена против смещения** $(x)$.

***Df.***

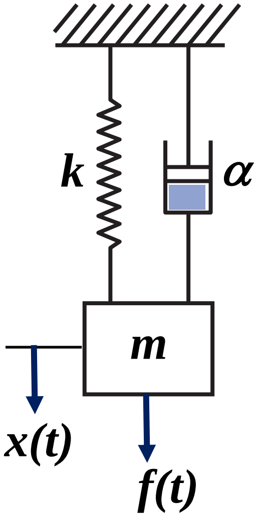
**Если сила пропорциональна смещению** $(F \propto x)$ **– осциллятор называется линейным.**

**D) Если** $U''(0) = 0$, **то и** $U'''(0) = 0$.

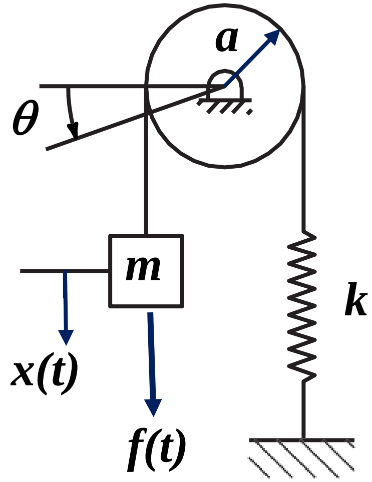
**Разложение** $U(x)$ **начинается с членов** $\propto x^4$.

**Сила пропорциональна** $x^3$ **колебания называются нелинейными в отличие от п. В) когда сила линейно зависит от смещения.**

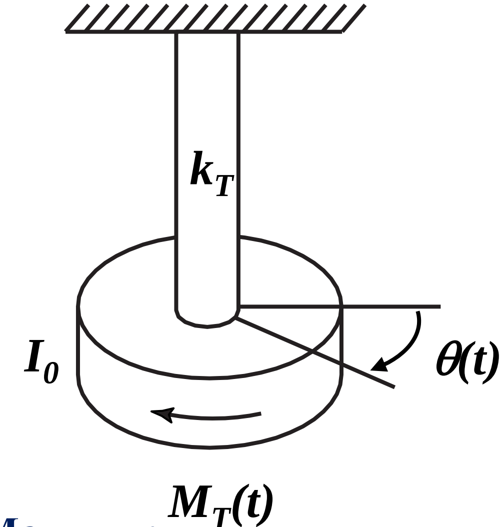
# 21. Примеры осцилляторов.



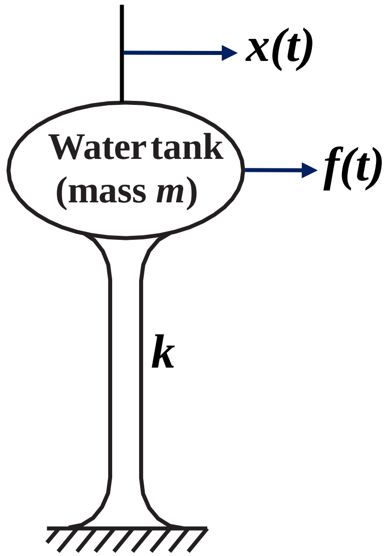

Амортизатор автомобиля.
Противооткатное
устройство орудия.

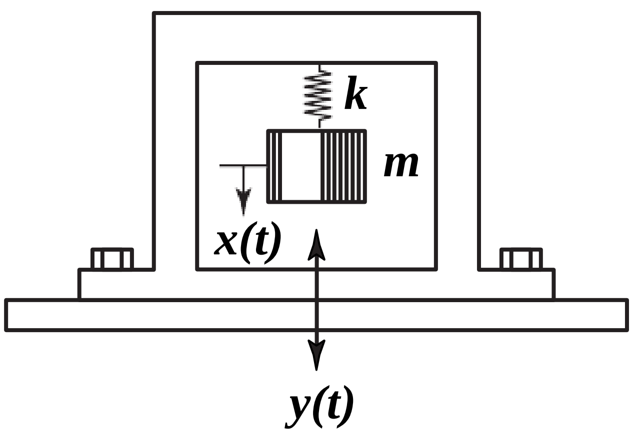



Маятник
часового механизма.




Маятник
часового механизма.




Вибрационный стенд.

## 21.1.2. Уравнение осциллятора (колебаний).

**Линейные одномерные гармонические колебания.**

**Потенциальная энергия при малом смещении относительно положения равновесия:**

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

***Note.*** **Малым смещением называется смещение много меньшее характерных размеров системы** $x << L$.

**Полная энергия:**

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const.$$

**Действующая сила:** $F = -\frac{dU}{dx} = -kx$ . $k$ – **жесткость.**

**Уравнение движения линейного (гармонического) осциллятора = уравнение колебаний:**

$$m\ddot{x} = -kx\,, \qquad m\ddot{x} + kx = 0\,.$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}\,.$$

$\omega$ - **собственная частота осциллятора.**

## 21.1.3. Частное решение уравнения колебаний.

**Заданы начальная координата** $x(0) = x_0$ ,
**скорость** $(dx/dt)_0 = v(0) = v_0$.
**Определена энергия осциллятора:**

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\omega^2 x_0^2}{2} = const.$$

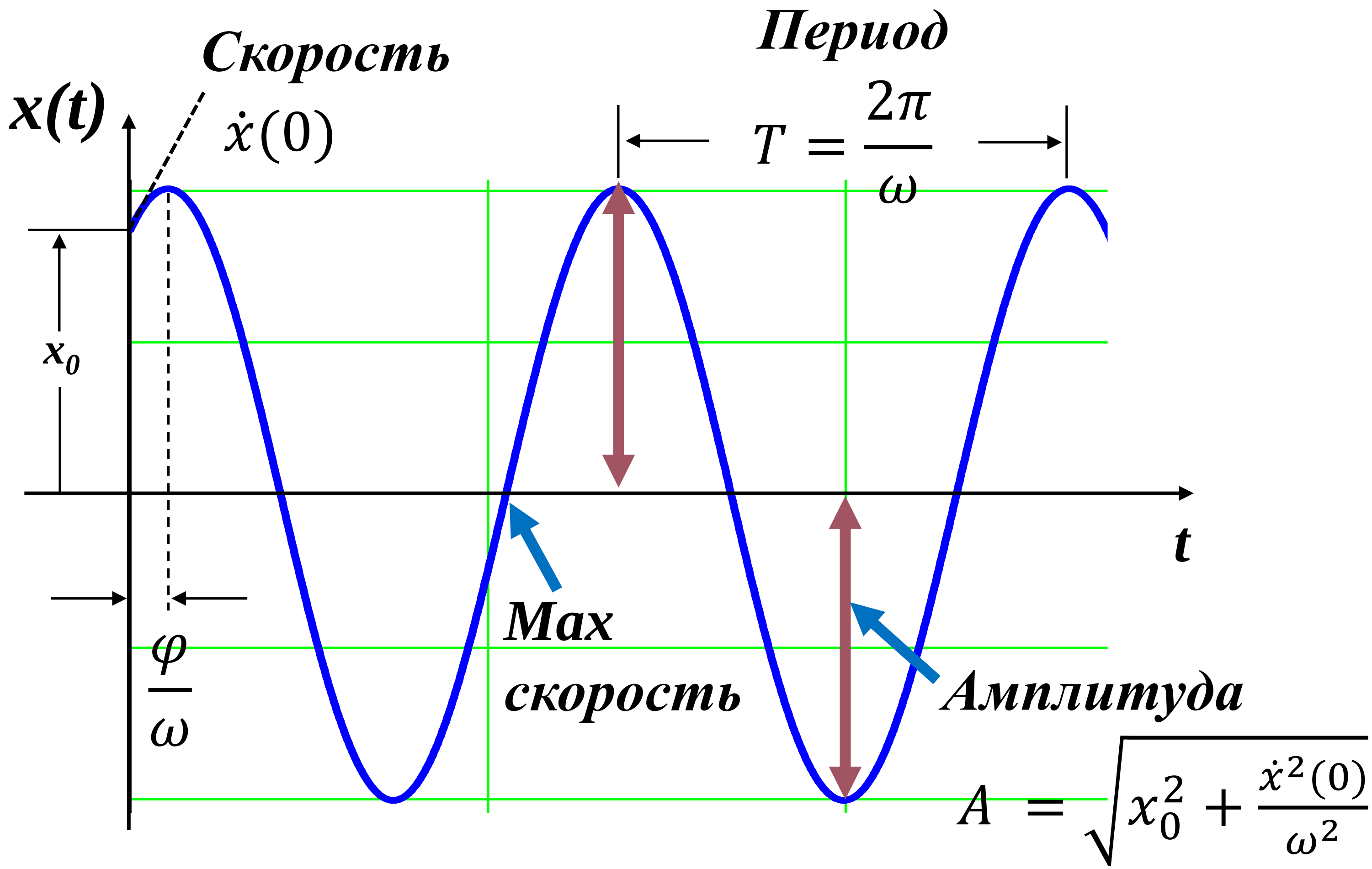
**Границы движения относительно положения равновесия** $( x = 0 )$ **равны амплитуде колебаний** $-A \le x \le +A$:

$$U(\pm A) = E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} ;$$

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\omega^2 x_0^2}{2} ; \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} .$$

## 21.1.2. График *x(t)*. Зависимость смещения от времени.




$$x(t) = A\,cos(\omega t - \varphi)$$

**Интегрирование согласно п. 20.1.3**

$$t(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0\,; \qquad t = 0, \qquad x = x_0\;;$$

**Замены:** $E = kA^2/2 = m\omega^2 A^2/2\;,\; \omega = \sqrt{k/m}\;,\; U = m\omega^2 x^2/2\;;$

$$t(x) = \pm\frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega}\left(\mp\arccos\left(\frac{x}{A}\right) - \varphi\right),$$

$$\varphi = \mp\arccos\left(\frac{x_0}{A}\right).$$

**Отсюда закон движения:**

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\;.$$

**Подстановка начальных данных:**

$$x(0) = x_0 = A\cos\varphi\;, \qquad \dot{x}(0) = v_0 = -A\omega\sin\varphi\;.$$

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\;.$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\ .$$

**Принятая терминология:**

$A$ – **амплитуда колебаний;**

$\omega t + \varphi$ – **фаза** ;

$\varphi$ – **начальная фаза,**

$$tg\,\varphi = -\ v_0/(\omega x_0)\ ;$$

$\omega$ – **частота круговая,** $\nu$ – **частота циклическая;**

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}\ ,\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

***Nb.***

**Для линейного осциллятора период колебаний не зависит от амплитуды!**

## 21.1.4. Энергетические соотношения.

**Потенциальная энергия *U(t)*** -

$$U(t) = \frac{1}{2}m\omega^2(x(t))^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(\cos(\omega t+\varphi))^2 =$$

$$= \frac{1}{4}m\omega^2A^2(1+\cos(2\omega t+2\varphi))\ ;$$

**Кинетическая энергия *K(t)*** –

$$K(t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2 = \frac{1}{2}m(A\omega\ \sin(\omega t+\varphi))^2 =$$

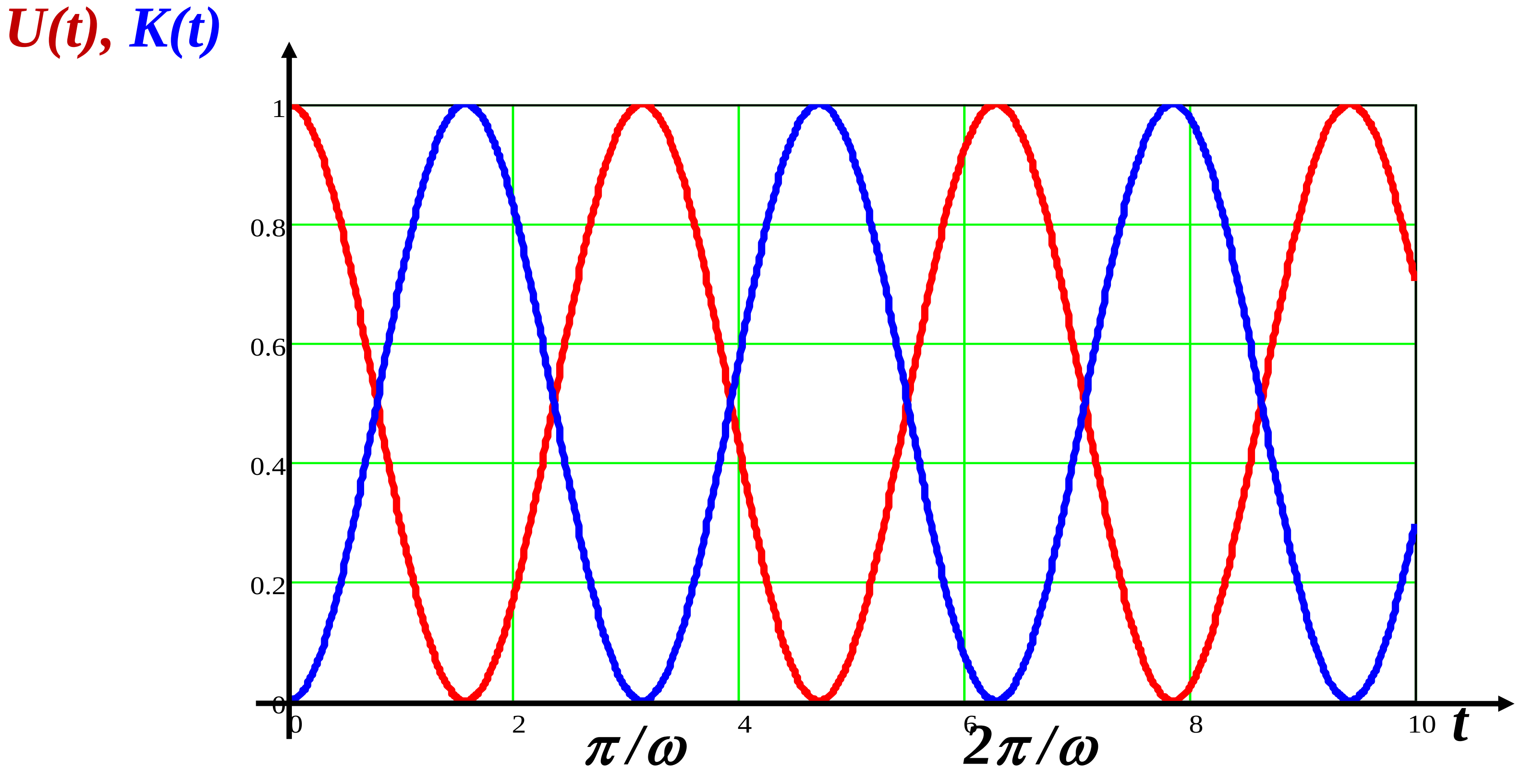
$$= \frac{1}{4}m\omega^2A^2(1-\cos(2\omega t+2\varphi)).$$

$$E = K+U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = const\ .$$

## 21.1.4. Энергетические соотношения.

**Потенциальная энергия** ***U(t)*** $= \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi))$;

**Кинетическая энергия** ***K(t)*** $= \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi))$.



## 21.1.5. Геометрическая интерпретация решения.

$x = A\cos(\omega t)$ - **проекция радиус вектора, вращающегося с постоянной угловой частотой** $\omega$.

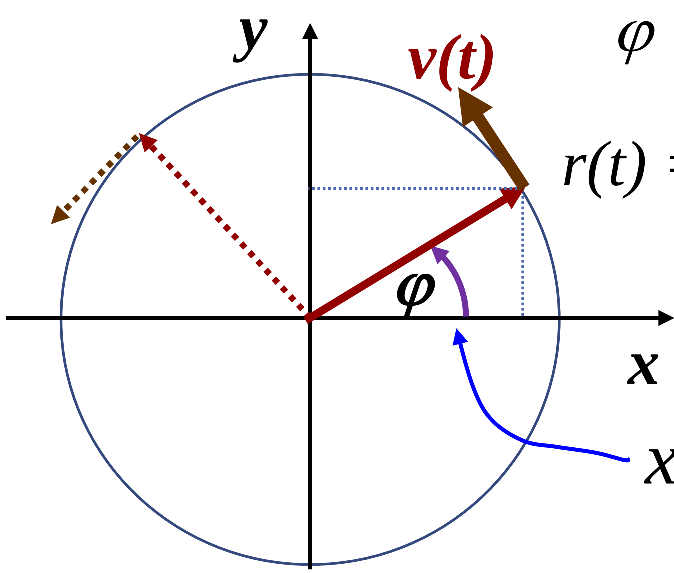
$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

**Вектор скорости:**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}, \dot{y}) = (-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t).$$

**Вектор ускорения:**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = \left(-A\omega^2\cos\omega t, -A\omega^2\sin\omega t\right)$$




$\varphi = \omega t$,

$r(t) = (x(t), y(t))$;

$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t)$.

## 21.2. Обобщение.

**Определение эффективной жесткости $k_{eff}$ и эффективной массы $m_{eff}$ осциллятора.**

**Вводятся обобщенная координата $q$ , обобщенная скорость $\dot{q}$.**

***Df.*** **Обобщенными координатами называется минимальное количество независимых переменных, которые полностью определяют динамические характеристики системы.**

***Пример.*** **Математический маятник.**

**Для описания системы достаточно введения единственной переменной – угла $\varphi$ относительно вертикали.**

**В общем случае в одномерном движении – потенциальная энергия:** $U = U(q)$,

**кинетическая энергия:** $K = K(q, dq/dt)$ .

**Разложение потенциальной энергии по малому смещению $x = q - q_0$ вблизи минимума определяет эффективный коэффициент жесткости системы $k_{eff}$.** $U(q) = k_{eff}x^2/2$ .

$$k_{eff} = \frac{d^2U(q_0)}{dq^2}, \qquad U(x) = \frac{1}{2}k_{eff} \cdot x^2 .$$

**Кинетическая энергия**

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}f(q)\dot{q}^2, \qquad q = q_0 + x, \qquad x \ll q_0,$$

$$K = \frac{1}{2}f(q_0)\dot{x}^2,$$

$$m_{eff} = f(q_0).$$

**Для малых колебаний:**

$$E = \frac{1}{2}m_{eff}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_{eff} \cdot x^2 = const .$$

**Уравнение колебаний**

$$m_{eff} \cdot \ddot{x} = -k_{eff} \cdot x \ ;$$

**Собственная частота осциллятора:**

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} .$$

***Пример.*** **Математический маятник.**

**Обобщенная координата – $\varphi$ - угол отклонения нити длины $l$ относительно вертикального направления.**

**Потенциальная энергия** $U(\varphi) = mg(l - l\cos\varphi) = mgl(1 - \cos\varphi)$ .

***Пример.*** **Математический маятник.**

**Обобщенная координата –** $\boldsymbol{\varphi}$ **- угол отклонения нити длины** $\boldsymbol{l}$ **относительно вертикального направления.**

**Потенциальная энергия**

$$U(\varphi) = mg(l - l\cos\varphi) \ = mgl(1-\cos\varphi) \ .$$

**Разложение** $U(\varphi\,)$ **по малости** $\varphi \ll 1\,, \rightarrow \ \cos\varphi \ \cong 1 - \ \varphi^2/2:$

$$U = \ \frac{1}{2}mgl\cdot\varphi^2 = \ \frac{k_{\mathrm{eff}}}{2}\cdot\varphi^2.$$

$$k_{eff} = mgl\,.$$

**Кинетическая энергия:**

$$E = \ \frac{1}{2}m\dot{v}^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2\,.$$

$$m_{eff} = ml^2$$

**Период колебаний:**

$$T = \ \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{eff}}{k_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

*Упражнение.*

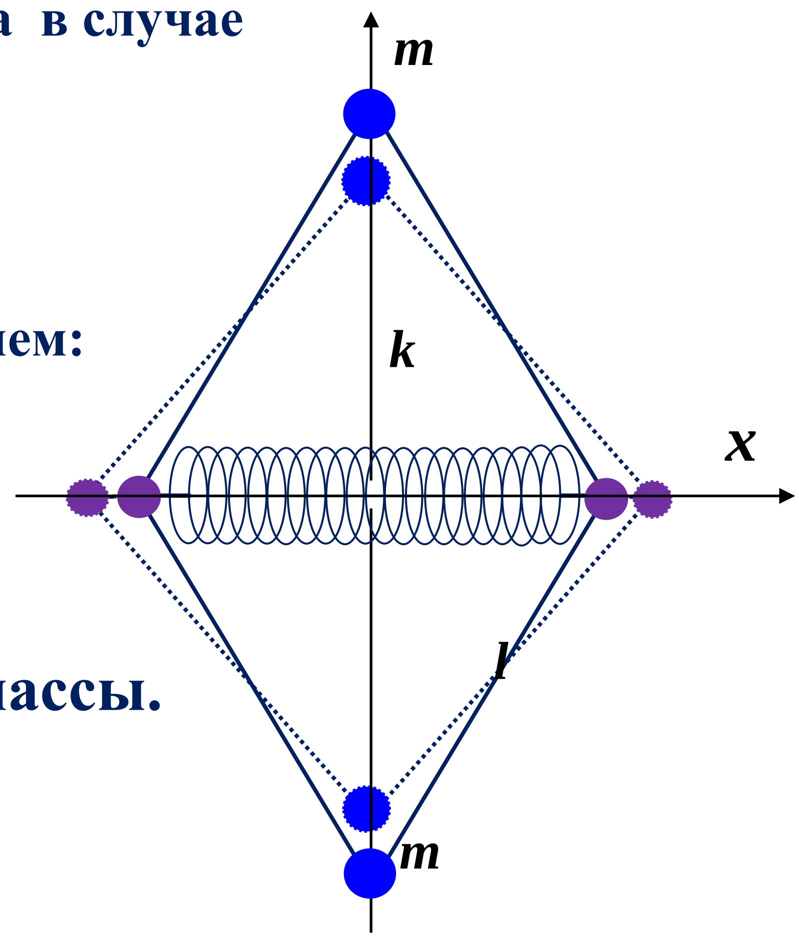
**Определение зависимости периода колебаний от амплитуды $T(A)$ математического маятника в случае нелинейных колебаний.**

**Задана зависимость $U = U(\varphi)$ вида:**

$$U = mgl\frac{\varphi^2}{2} - mgl\frac{\varphi^4}{24}\,.$$

*Указание.* **Воспользоваться соотношением:**

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0\,.$$




*Пример.* **Определение эффективной массы.**

*Задача.* **Определить частоту колебаний системы (см. рис.).**

**Стержни невесомы, длина пружины в недеформированном состоянии равна длине стержня $l$.**

**Трения в шарнирах нет.**

***Решение.*** **Движение точечных масс происходит строго по вертикали. Из кинематической связи** $l = const$ **имеем:** $y(t) = \sqrt{l^2 - x^2}$.

**Дифференцируя по времени** $y(t)$

$$\dot{y} = \frac{-x\dot{x}}{\sqrt{l^2 - x^2}} = -\mathrm{tg}(\alpha)\dot{x}\,;$$

**В положении равновесия, при** $\alpha = 30^0$: $\dot{y} = v_y = -v_x/\sqrt{3}$ .

**Кинетическая энергия 2-х масс, движущихся по вертикали:**

$$\frac{2m}{2} \cdot v_y^2 = \left(\frac{m}{3}\right) \cdot v_x^2\,.$$

**Отсюда эффективная масса осциллятора –** $m_{eff} = 6m$ **!**

**Поскольку удлинение пружины вдвое больше удлинения одной половины, то потенциальная энергия деформации пружины:**

$$U = \frac{k}{2}(2x)^2 = (2k) \cdot x^2\,.$$

**Находим частоту осциллятора:**

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{(m/3)}} = \sqrt{\frac{6k}{m}}\,.$$

**Summary.**

**Определение собственной частоты осциллятора.**

**1. Энергетический подход**

$$U = A\frac{q^2}{2}, \qquad K = B\frac{\dot{q}^2}{2}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\mathbf{SQRT}\left(\frac{\textbf{A - (коэфф. при квадрате обобщ. координаты)}}{\textbf{B - (коэфф. при квадрате обобщ. скорости)}}\right)$$

**2. Силовой подход**

$$F = -Aq, \qquad m_{eff}\cdot a = B\ddot{q}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\mathbf{SQRT}\left(\frac{\textbf{A - коэффициент при обобщенной координате}}{\textbf{B - коэффициент при обобщенном ускорении}}\right)$$

## 21.3. Математическое дополнение.

**Ищется решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $n$ – го порядка –**

$$(*) \qquad L^n(x) = a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{(n-1)} \frac{d^{(n-1)} x}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = 0\,.$$

$a_i$ **– заданные коэффициенты.**

**Справедлив принцип суперпозиции – пусть $x_1(t)$ , $x_2(t)$ решения (*), тогда линейная суперпозиция $c_1\, x_1(t) + c_2 x_2(t)$ также решение уравнения (*) .**

**В уравнении (*) выполняется замена переменной** $x(t) = \mathrm{Re}\left(e^{\gamma t}\right)$.

**Исходное дифференциальное уравнение после подстановки производных преобразуется в алгебраическое:**

$$(**) \qquad a_n \gamma^n + a_{(n-1)} \gamma^{(n-1)} + \cdots + a_1 \gamma + a_0 = 0\,.$$

***Df.*** **Алгебраическое уравнение (**) называется характеристическим.**

**Если найдены корни $\{\gamma_i\}$ $i = 1, \dots, n$ характеристического уравнения, тогда общее решение -**

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left\{c_j e^{\gamma_j t}\right\}\ .$$

***Df.*** **Неоднородным называется уравнение с правой частью вида :**

$$(***) \qquad L^n(x) = f(x)\,.$$

***Df.*** **Решение неоднородного *(***)* есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного :**

$$x(t) = x_{\text{однор.}}(t) + x_{\text{частн. неоднор.}}(t)\ !$$

***Пример.***

**Уравнение линейного осциллятора:**

$$\ddot{x} + \omega^2\, x = 0\,.$$

**Характеристическое уравнение:** $\gamma^2 + \omega^2 = 0\,,$

**Корни характеристического уравнения:**

$$\gamma_1\,, \gamma_2 = \pm i\omega\,.$$

**Общее решение:**

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right\} = A\,\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

***Упражнение.***

**Определить зависимость амплитуды** $A$ **от констант** $c_1, c_2$ –

$$A = A(c_1, c_2)\,,\ \varphi = \varphi\,(c_1, c_2)\,.$$

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

*http://phys.nsu.ru/fit*

*http://el.nsu.ru*